Dossier pour le concours C-Génial 2013

# *LES ENSEMBLES GONFLÉS*

Par Margaux LE BRUN & Fabian RAINOUARD élèves de 1ère S1 du lycée d'Altitude de Briançon

Sciences à l'École

C.génial
Fondation pour la culture scientifique et technique

Région Provence Alpes Côte d'Azur

académie d'aix-marseille

Briançon LYCÉE d'Altitude

MATh en JEANS

INSTITUT FOURIER

**Le principe des ateliers *MATh.en.JEANS* dont est issu le sujet présenté dans ce rapport**

Les ateliers *MATh.en.JEANS* ont pour but depuis vingt-quatre ans de mettre les jeunes lycéens et collégiens dans la même situation qu'un chercheur professionnel.

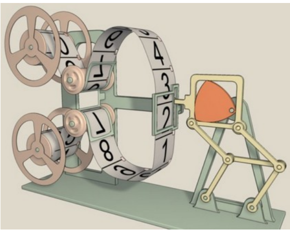
Pour cela une équipe d'enseignants et de chercheurs propose en début d'année scolaire des sujets de recherche aux élèves volontaires. Ces derniers se mettent en groupe et travaillent sur leur sujet. Dans l'année ils sont encadrés par les enseignants et suivis par un chercheur. Plusieurs fois dans l'année, des séminaires communs sont organisés par les établissements travaillant sur des sujets identiques. C'est l'occasion pour les jeunes d'échanger, de confronter leurs idées et leurs démarches et de s'entraider. En fin d'année scolaire un congrès national qui regroupe tous les ateliers *MATh.en.JEANS* est organisé. Ce rassemblement se déroule sur trois jours pendant lesquels les élèves exposent en amphi et sous forme de stands. Le congrès est un grand moment pour les jeunes. La fin de l'année est consacrée à la rédaction des articles et à la réalisation des panneaux.

Lors du congrès international *MATh.en.JEANS* 2011 à Vienne, le Lycée français de Varsovie avait présenté un sujet sur les ensembles gonflés du plan. La présentation des élèves et la richesse du sujet ont incité à proposer ce sujet en 2011-2012 puis en 2012-2013 au lycée d'Altitude.

La première année, deux groupes ont travaillé sur ce sujet : un groupe de seconde et un groupe de première. L'année suivante, les secondes ont poursuivi en première mais les premières ont préféré changer de sujet.

Ce sujet a été présenté aux Forums des Mathématiques d'Aix-en-Provence en 2012 et en 2013, ainsi qu'au Forum des Mathématiques de Corse. Il a aussi été présenté à la Journée Portes ouvertes de l'IREM de Grenoble. Il a fait l'objet d'un exposé et d'un stand au congrès national *MATh.en.JEANS* de Lille et au congrès international *MATh.en.JEANS* de Copenhague. Il a été invité aux « 10 heures avec Henri Poincaré » à la Sorbonne et enfin il a participé au Salon de la culture et des jeux mathématiques à Paris où les élèves ont obtenu le premier prix André Parent 2012.

Quelques applications des ensembles gonflés :



Forme de came utilisée en particulier dans la projection de films. Existe dans la première caméra des frères Lumière.

http://www.etudes.ru/fr/etudes/

Plaque d'égout de San Francisco.

https://www.maa.org/foundmath/08week21.html

Pièce de monnaie anglaise : les mêmes propriétés que le cercle mais moins de métal... comme les plaques d'égout.

Moteur Wankel qui équipe les Mazda série RX8

http://modena49.forumgratuit.ch/t151-refroidissement-et-flux-aerodynamique

**Les ensembles gonflés**

Par LE BRUN Margaux et RAINOUARD Fabian, élèves de première S du lycée d'Altitude de Briançon.

Enseignant : Hubert PROAL (professeur de mathématiques du lycée d'Altitude)
Chercheur : Camille PETIT (Institut Fourier de Grenoble)

Une grande partie du dossier ci-dessous va être publié dans la revue *Quadrature*.

## 1. Qu'est-ce qu'un ensemble gonflé ?

Notons $d(X,Y)$ la distance (euclidienne) séparant deux points $X$ et $Y$ du plan. Nous dirons qu'une figure (c'est-à-dire un ensemble compacte de points du plan) $\mathcal{F}$ du plan est de diamètre $d$ si :
– il existe deux points $A$ et $B$ appartenant à $\mathcal{F}$ pour lesquels $d(A,B) = d$,
– pour tous points $X$ et $Y$ de $\mathcal{F}$, $d(X,Y) \leqslant d$.

**Définition :**
On dit que $\mathcal{F}$ est gonflé de diamètre $d$ si l'ajout de n'importe quel point du plan à l'extérieur de $\mathcal{F}$ fait augmenter son diamètre.

**Définition équivalente :**
$\mathcal{F}$ est gonflé de diamètre $d$ si pour tout point A de la frontière de $\mathcal{F}$, il existe au moins un point B de $\mathcal{F}$ tel que $d(A,B) = d$. Une autre manière de voir cette définition est de dire qu'on peut faire tourner $\mathcal{F}$ entre deux droites parallèles à distance $d$ l'une de l'autre, et ceci en restant constamment en contact avec les deux droites.

**Problème :**
Le but de nos recherches est d'essayer de répertorier un maximum d'ensembles gonflés et d'établir quelques-unes de leurs propriétés (dans le plan et dans l'espace).

**Quelques exemples :**

Le diamètre d'un cercle, tel qu'il a été défini ci-dessus, correspond au diamètre « traditionnel » du cercle. Un cercle est un ensemble gonflé car si nous ajoutons un point à l'extérieur du cercle, le diamètre de ce nouvel ensemble augmente (voir figure 1).

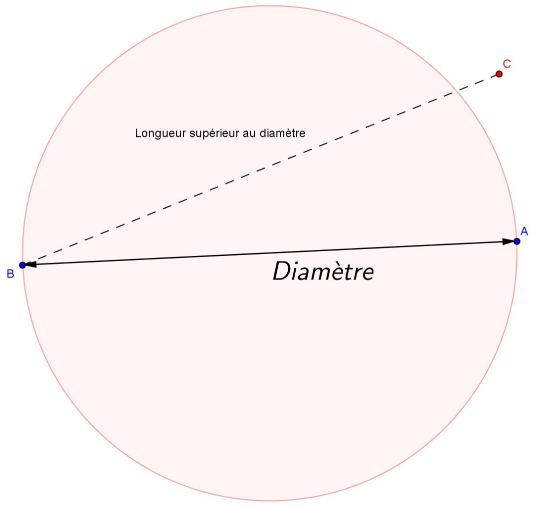



*Figure 1 : l'ajout d'un point à l'extérieur du cercle augmente le diamètre. Le cercle est gonflé.*

Le diamètre d'un carré correspond à la diagonale. Un carré n'est pas gonflé. En effet, il est possible d'ajouter un point extérieur au carré sans faire augmenter le diamètre (voir figure 2).

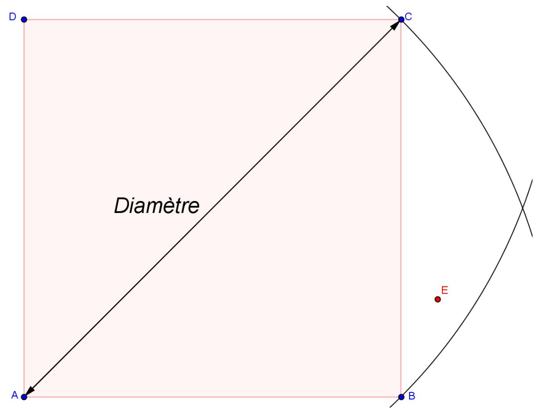



*Figure 2 : l'ajout du point E au carré donne un ensemble de même diamètre que le carré de départ. Le carré n'est donc pas gonflé.*

## 2. Gonfler un ensemble

Une première méthode pour construire un ensemble gonflé est de partir d'une figure classique du plan qui n'est pas gonflée (carré, triangle...) et de la gonfler . Nous dirons qu'une figure $\mathcal{G}$ est **un ensemble gonflé d'une figure $\mathcal{F}$** si $\mathcal{G}$ est un ensemble gonflé de même diamètre que $\mathcal{F}$, contenant $\mathcal{F}$.

Un exemple d'ensemble gonflé du carré de diamètre *d* est le cercle circonscrit à ce carré. Remarquons qu'une figure $\mathcal{F}$ peut admettre plusieurs ensembles gonflés. Par exemple pour le carré, la figure 3 ci-contre est un autre ensemble gonflé.

Notons que le périmètre de cet ensemble gonflé est égal à $\pi \times d$, comme celui du cercle circonscrit au carré. En revanche, les surfaces de ces deux ensembles gonflés diffèrent.

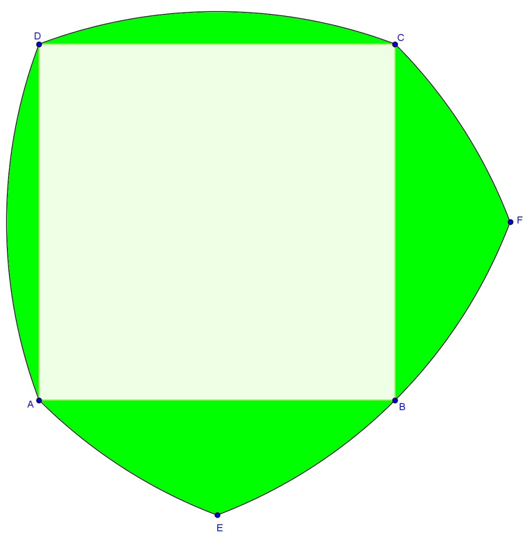



*Figure 3 : un exemple d'ensemble gonflé du carré.*

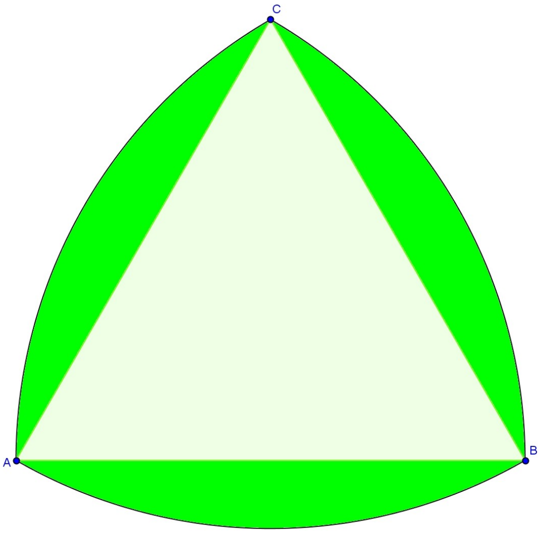


*Figure 4 : le triangle de Reuleaux.*

Dans le cas du triangle équilatéral, nous avons trouvé un seul ensemble gonflé (voir figure 4). Cet ensemble s'appelle le triangle de Reuleaux. Le cercle circonscrit n'est pas de même diamètre que le triangle, ce n'est donc pas un ensemble gonflé de ce dernier. Nous avons démontré (corollaire 4) que le triangle de Reuleaux est l'unique ensemble gonflé du triangle équilatéral.

Il est facile de démontrer que le périmètre du triangle de Reuleaux de diamètre $d$ est $d \times \pi$ et sa surface est $\dfrac{d^2(\pi - \sqrt{3})}{2}$. Notons que la surface du triangle de Reuleaux est inférieure à celle du cercle de diamètre $d$.

Voici encore des exemples d'ensembles gonflés du triangle rectangle autres que le cercle circonscrit.

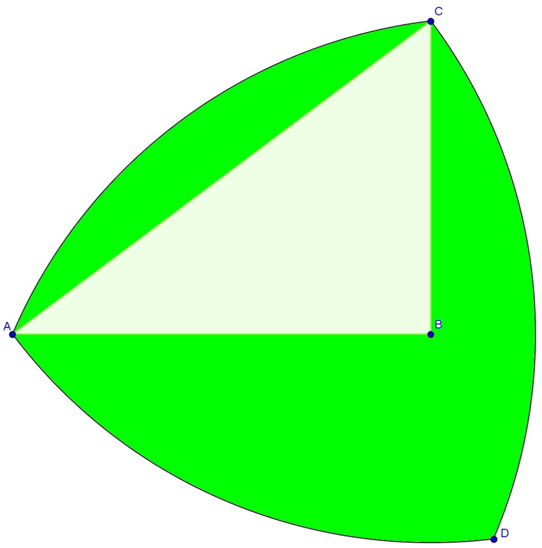


*Figure 5 : un exemple d'ensemble gonflé du triangle rectangle : nous retrouvons le triangle de Reuleaux.*

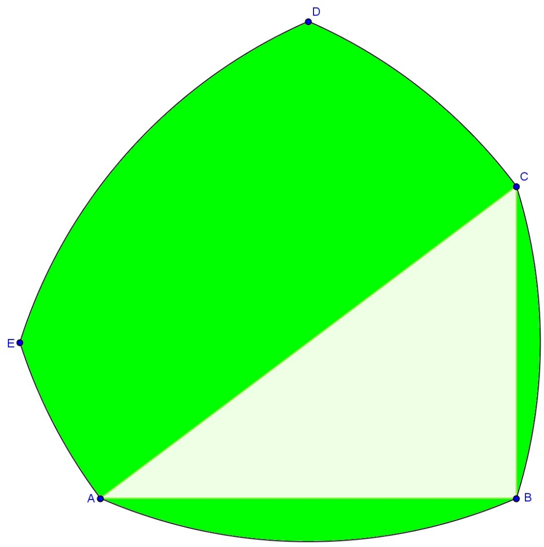


*Figure 6 : un autre exemple d'ensemble gonflé du triangle rectangle.*

À nouveau, nous pouvons montrer que dans les deux cas ci-dessus (figures 5 et 6), le périmètre est égal à $\pi \times d$, où $d$ est le diamètre du triangle rectangle.

Tous les ensembles gonflés d'un polygone de diamètre $d$ sont inclus dans l'intersection des disques de rayon $d$ et de centres les sommets du polygone. Nous appelons cet ensemble **l'enveloppe des ensembles gonflés** du polygone. Dans le cas du triangle rectangle par exemple, l'enveloppe des ensembles gonflés est dessinée ci-dessous (figure 7).

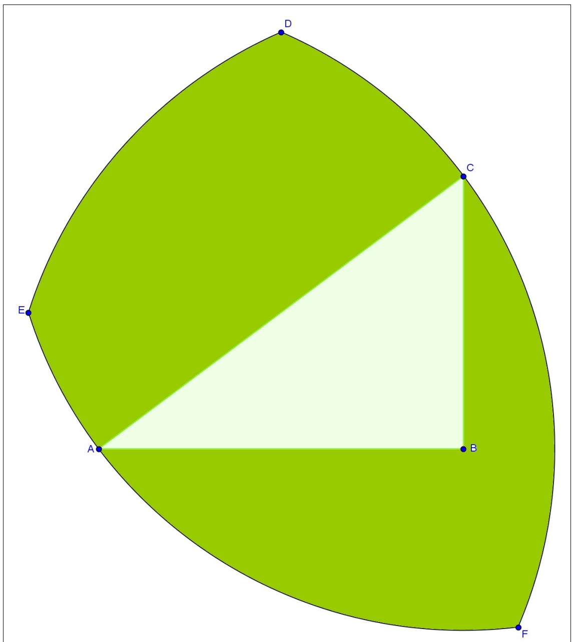



*Figure 7 : enveloppe des ensembles gonflés du triangle rectangle.*

Une autre méthode de construction d'ensembles gonflés proposée par notre chercheur.

Nous traçons des droites sécantes, par exemple trois droites et notons $A$, $B$ et $C$ les points d'intersection (voir la figure 8).

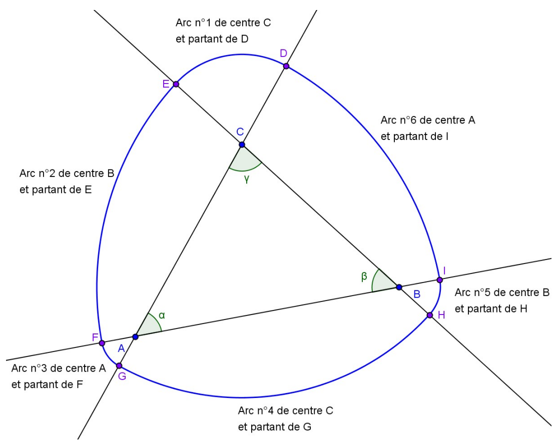



*Figure 8 : nous prenons un point D sur une des droites contenant C, « loin » des intersections des droites. Puis nous traçons les arcs de cercles comme indiqués sur la figure.*

Face à cette nouvelle manière de construire des ensembles gonflés, nos premières questions ont été :
- Est-ce que cette construction se « ferme » ?
Oui, il n'est pas difficile de montrer que le dernier arc construit se termine au point D. On remarque au passage que $d(D,G)=d(E,H)=d(F,I)=d$, où $d$ est le diamètre de l'ensemble que l'on vient de construire.
- Est-ce que cet ensemble est gonflé ?
Oui, la méthode de construction nous assure que l'ensemble construit est de largeur constante, donc gonflé.
- Peut-on choisir le point D n'importe où ? Peut-on déterminer le diamètre de cet ensemble en fonction de la position du point D ?
Notons $p=d(C,D)$, $a=d(B,C)$, $b=d(A,C)$ et $c=d(A,B)$. Avec ces notations, si les trois conditions suivantes sont vérifiées, $p>0$, $a+p-c>0$ et $b+p-c>0$, alors la construction fournira un ensemble gonflé dont le diamètre est $d=a+b+2p-c$.
- Que vaut le périmètre de cet ensemble ?
Puisque $d(D,G)=d(E,H)=d(F,I)=d$, le périmètre de l'ensemble est égal à $d\times\gamma+d\times\beta+d\times\gamma$ (voir la figure 8 pour les notations). Mais comme la somme des angles d'un triangle est égale à $\pi$, le périmètre de l'ensemble est égal à $d\times\pi$.

### 3. Quelques propriétés des ensembles gonflés :

Après avoir étudié certains ensembles gonflés, nous avons formulé, et dans certains cas démontré, des résultats plus généraux.

**Conjecture 1 :** Le périmètre d'un ensemble gonflé de diamètre *d* est égal à $\pi \times d$.

Nous n'avons pas la démonstration dans le cas général, mais toutes nos constructions vérifient la conjecture. *[Note du chercheur : cette conjecture est en réalité un théorème, dû à Joseph Emile Barbier (1839-1889)]*

**Conjecture 2 :** Le triangle de Reuleaux de diamètre *d* réalise la plus petite surface parmi les ensembles gonflés de diamètre *d*. *[Note du chercheur : il s'agit d'un théorème de Blaschke et Lebesgue]*

**Propriété 3 :** Un ensemble gonflé de diamètre *d* ne peut être inclus dans un autre ensemble gonflé de même diamètre.

Démonstration de la propriété 3 :
La propriété 3 se reformule de la manière suivante : soient A et B deux ensembles gonflés de diamètre *d* tels que $A \subset B$. Alors A=B .
Nous allons procéder par l'absurde.
Supposons que $A \neq B$. Alors il existe un point P tel que $P \in B$ et $P \notin A$ .
On note A' l'ensemble formé de A et du point P.
Puisque A est gonflé, le diamètre de A' est strictement supérieur à *d.*
Mais $A' \subset B$ et B est de diamètre *d*, ce qui fournit une contradiction. On a donc bien démontré que A=B.

**Corollaire 4 :** Un polygone régulier avec un nombre impair de côtés admet un unique ensemble gonflé qui est l'enveloppe des ensembles gonflés de ce polygone. En particulier, le triangle équilatéral admet un unique ensemble gonflé.

Démonstration du corollaire 4 :
Il suffit de remarquer que l'enveloppe des ensembles gonflés d'un tel polygone est un ensemble gonflé, et d'utiliser la propriété 3.

**Propriété 5 :** Les polygones réguliers avec un nombre pair de côtés admettent au moins leur cercle circonscrit comme ensemble gonflé.

**Propriété 6 :** Le bord d'un ensemble gonflé ne contient aucun segment.

Démonstration de la propriété 6 :
Rappelons que pour tout point du bord d'un ensemble gonflé de diamètre *d*, il existe un point de l'ensemble à distance *d* (voir la définition équivalente d'un ensemble gonflé donnée à la fin de la première section).
Supposons que le bord d'un ensemble gonflé contienne un segment [AB], alors le milieu de ce côté, que l'on note I, est sur le bord. Il existe donc un point C de l'ensemble à distance *d* de I.
Puisque C appartient à l'ensemble gonflé, la distance de C aux deux points A et B est inférieure ou égale à *d.* Or dans un triangle il y a au moins un des côtés de longueur supérieure à la longueur de la médiane.
Nous obtenons donc une contradiction et la propriété 6 est démontrée.

**Propriété 7 :** Les diamètres d'un ensemble gonflé sont sécants.

**Propriété 8 :** Il n'existe pas d'ensemble gonflé construit avec seulement deux arcs de cercles.

**Conjecture 3 :** Pour un ensemble gonflé, le centre du cercle inscrit (le plus grand cercle à l'intérieur de l'ensemble) et le centre du cercle circonscrit (le plus petit cercle contenant l'ensemble) sont confondus.

Nous travaillons actuellement sur cette conjecture et la construction des cercles inscrits et circonscrits.

### 4. Les ensembles gonflés dans l'espace

Les ensembles gonflés de l'espace sont beaucoup plus difficiles à construire (sur ordinateur) et à étudier. Avec l'aide de notre chercheur, nous sommes arrivés à construire un premier type d'ensemble gonflé de l'espace. Nous prenons un ensemble gonflé du plan qui admet un axe de symétrie, on le fait tourner autour de cet axe pour obtenir l'ensemble gonflé (voir figure 9)

**Propriété 9 :** l'enveloppe des ensembles gonflés du tétraèdre régulier (intersection des quatre sphères de centre les sommets du tétraèdre - figure 10) n'est pas gonflée.

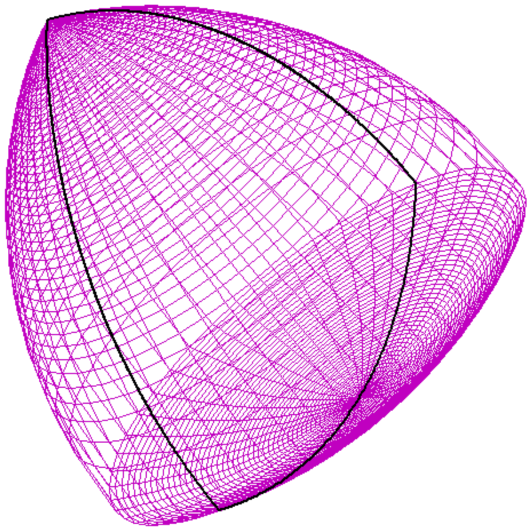


*Figure 9 : surface de résolution obtenue en faisant tourner un triangle de Reuleaux.*

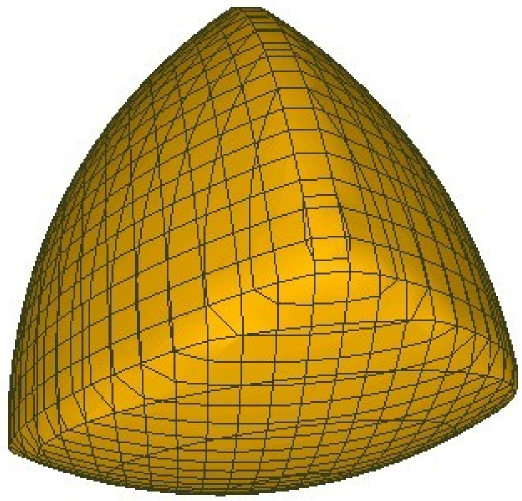


*Figure 10 : enveloppe des ensembles gonflés du tétraèdre, qui n'est pas gonflé.*

*Figure 11 : solides à diamètre constant. Palais de la découverte*

### 5. Questions sans réponses actuelles de notre part

Lors de nos recherches et de nos présentations à diverses manifestations, on nous a demandé :

- parmi les ensembles gonflés de même diamètre, lequel a la plus petite surface ? Dans les nombreux exemples que nous avons traités, il semblerait que ce soit le triangle de Reuleaux qui réalise la plus petite surface mais nous en n'avons pas encore la preuve.
- existe-t-il des ensembles gonflés dont le bord ne contient aucun arc de cercle ?
- quelles conditions doit vérifier un ensemble pour que le triangle de Reuleaux ne soit pas un ensemble gonflé de cet ensemble ?
- la section d'un ensemble gonflé de l'espace donne-t-elle un ensemble gonflé du plan ?
- comment construire des ensembles gonflés de l'espace autrement que par les surfaces de révolution ?

Accord pour la participation
au concours C-Génial 2013
Briançon le 12 Mars 2013

LYCEE POLYVALENT D'ALTITUDE 05105 BRIANCON
LE PROVISEUR

**Résumé**

Une manière de définir un ensemble gonflé de diamètre *d* est que l'on ne peut pas le rendre plus grand sans faire augmenter son diamètre. Le cercle ne constitue qu'un exemple parmi d'autres. Une fois réalisés quelques ensembles en partant de figures simples, les premières questions ont surgi. Elles se sont peu à peu complexifiées. Certaines solutions ont mis du temps à apparaître. Des contre-exemples ont invalidé certaines hypothèses. De nombreuses rencontres avec des chercheurs ont permis de se poser de nouvelles questions. La construction des ensembles gonflés de l'espace a été laborieuse ; la question de savoir si les résultats du plan se généralisent dans l'espace reste ouverte.
Nos recherches ne s'arrêtent jamais et de nouvelles questions surgissent en permanence. Chaque pas que nous faisons en avant ou en arrière débouche sur d'autres problèmes. C'est sans fin mais cela nous apporte à tous – élèves, enseignants, chercheurs – de grandes satisfactions.